A Dirichlet-tétel

Matematika BSc szakdolgozat

Szerző:
Körmendi Kristóf

Témavezető:
Dr. Waldhauser Tamás
Algebra és Számelmélet
Tanszék

Szegedi Tudományegyetem Bolyai Intézet

2009

Bevezetés

Az analitikus számelmélet annak a meghökkentő ténynek a felismerésével vette kezdetét, hogy bizonyos komplex függvények tulajdonságaiból következtetéseket vonhatunk le a természetes számokkal kapcsolatban. Leonhard Euler volt az első, aki felismerte ezt a kapcsolatot, és az általa definiált ζ függvény segítségével bebizonyította, hogy a prímszámok reciprokaiból álló sor divergens. Később 1837-ben Dirchlet mutatta meg, hogy $(a, m) = 1$ esetén az $a + km$ alakú számok között végtelen sok prímszám van. Ennél egy erősebb állítás, ami Euler tétele általánosításásnak is tekinthető, hogy azon prímszámok reciprokaiból alkotott sor divergens, amelyek kongruensek a-val modulo m. Bernhard Riemann egyetlen számelméleti témájú dolgozata 1859-ben jelent meg. Ez a mű mutatta meg igazán a ζ függvény vizsgálatában rejlő lehetőségeket, és tartalmazta a híres Riemann-sejtést.

Az első igazán nagy eredmény a prímszámtétel, miszerint

$$\pi(x) \sim \frac{x}{\log(x)},$$

azaz az x-nél kisebb prímszámok száma aszimptotikusan $\frac{x}{\log(x)}$. Ezt Gauss már 1796-ban sejtette, de igazolni nem tudta. Csebisev bizonyította, hogy nagy x-re

$$0,922\frac{x}{\log(x)} \leq \pi(x) \leq 1,105\frac{x}{\log(x)}.$$

Később 1896-ban Hadamard és de la Vallée Poussin igazolta a tételt. Ehhez azt mutatták meg, hogy a ζ függvénynek nincs zérushelye a $\mathrm{Re}(s) = 1$ egyenesen. Később kiderült, hogy a két állítás ekvivalens. Napjaink egyik legfontosabb, 150 éve megoldatlan problémája Riemann azon sejtésének igazolása, miszerint a ζ függvény minden nemtriviális zérushelye a $\mathrm{Re}(s) = \frac{1}{2}$ kritikus egyenesre esik.

Ezen dolgozat célja a Dirichlet-tétel erősebb alakjának igazolása. Ehhez bevezetjük a Dirichlet-karakter fogalmát, és ezen karakterek alapvető tulajdonságainak igazolása után megalkotjuk a Dirichlet L függvényeket. Előállítjuk ezen függvényeket Euler-szorzat alakban, majd megvizsgáljuk egy az eredetileg definiáltnál tágabb tartományon való értelmezés lehetőségét. Ezután megmutatjuk, hogy a triviális Dirichlet-karakterhez tartozó L függvénynek egyszeres pólusa van az $s = 1$ helyen. Ezen állításokat felhasználva pedig igazoljuk Dirichlet tételét.

Tartalomjegyzék

1. Karakterek

1.1. Véges Abel-csoportok karakterei

1.1. Definíció. Tetszőleges G véges Abel-csoport esetén, a $\chi : G \to \mathbb{C}^*$ homomorfizmusokat G karaktereinek nevezzük. A G csoport karaktereinek halmazát $\widehat{G}$ jelöli. A továbbiakban G mindig véges Abel-csoportot jelöl.

1.2. Lemma. *Tetszőleges $\chi \in \widehat{G}$ karakter és $g \in G$ esetén $\chi(g)$ egy $|G|$-adik egységgyök.*

Bizonyítás. Jelölje 1 a G csoport egységelemét, ekkor minden $g \in G$-re igaz, hogy $g^{|G|} = 1$. Továbbá tudjuk, hogy χ homomorfizmus, így $\chi(1) = 1$. Ezeket felhasználva adódik, hogy bármely $\chi \in \widehat{G}$ és bármely $g \in G$ esetén

$$(\chi(g))^{|G|} = \chi\left(g^{|G|}\right) = \chi(1) = 1.$$

■

1.3. Tétel. *A $\widehat{G}$ halmaz csoport a pontonkénti szorzással, és $G \cong \widehat{G}$.*

Bizonyítás. Nyilvánvaló, hogy $\widehat{G}$ egységeleme a konstans 1 karakter. Jelölje ezt a karaktert χ_0. A χ karakter inverze $\overline{\chi}$, hiszen egységnyi abszolút értékű komplex szám reciproka megegyezik a konjugáltjával. Ezek után $\widehat{G}$ csoport voltát egyszerű számolással ellenőrizhetjük.

Az izomorfizmus bizonyításához első lépésben tegyük fel, hogy G ciklikus, azaz $G = [g]$ valamely $g \in G$-re. Vegyük észre, hogy a $\chi \in \widehat{G}$ karaktert egyértelműen meghatározza g képe, ami $|G|$-adik egységgyök. Továbbá ha ε egy tetszőleges $|G|$-adik egységgyök, akkor a $\chi_\varepsilon(g^k) = \varepsilon^k$ képlettel definiált χ_ε leképezés karakter, így $|G| = |\widehat{G}|$. Ha ε egy primitív $|G|$-adik egységgyök, akkor

$$\forall \chi \in \widehat{G}\ \exists k \in \mathbb{Z} \text{ úgy, hogy } \chi(g) = \varepsilon^k = \chi_\varepsilon^k(g),$$

tehát $\widehat{G} = [\chi_\varepsilon]$, így a karakterek csoportja ciklikus. Ezekből pedig $G \cong \widehat{G}$ következik.

Ha G nem ciklikus, akkor a véges Abel-csoportok alaptételének értelmében G előáll ciklikus csoportok direkt szorzataként, így a bizonyítás befejezéséhez elegendő azt megmutatni, hogy tetszőleges H_1 és H_2 csoportok esetén $\widehat{H_1 \times H_2} \cong \widehat{H_1} \times \widehat{H_2}$. Ehhez tekintsük a következő homomorfizmusokat:

$$\varphi : \widehat{H_1} \times \widehat{H_2} \to \widehat{H_1 \times H_2},\ (\chi_1, \chi_2) \mapsto \chi,\ \text{ahol } \chi(a,b) = \chi_1(a) \cdot \chi_2(b),$$
$$\psi : \widehat{H_1 \times H_2} \to \widehat{H_1} \times \widehat{H_2},\ \chi \mapsto (\chi_1, \chi_2),\ \text{ahol } \chi_1(a) = \chi(a,1) \text{ és } \chi_2(b) = \chi(1,b).$$

Az alábbi számolás mutatja, hogy φ és ψ egymás inverzei:

$$(\chi\psi\varphi)(a,b) = \chi(a,1) \cdot \chi(1,b) = \chi(a,b),$$
$$((\chi_1,\chi_2)\varphi\psi)(a,b) = (\chi_1(a) \cdot \chi_2(1), \chi_1(1) \cdot \chi_2(b)) = (\chi_1(a), \chi_2(b)).$$

■

1.4. Állítás. *Minden $\chi \in \widehat{G},\ \chi \neq \chi_0$ esetén*

$$\sum_{g \in G} \chi(g) = 0.$$

Bizonyítás. Mivel G csoport, így minden $a \in G$ esetén teljesül, hogy

$$\{a \cdot g \mid g \in G\} = \{g \mid g \in G\}.$$

Ezt felhasználva kapjuk, hogy

$$\sum_{g \in G} \chi(g) = \sum_{g \in G} \chi(ag) = \sum_{g \in G} \chi(a)\chi(g) = \chi(a) \sum_{g \in G} \chi(g).$$

Mivel $\chi \neq \chi_0$, ezért van olyan $a \in G$, hogy $\chi(a) \neq 1$, így

$$\sum_{g \in G} \chi(g) = 0.$$

■

1.5. Állítás. *Tetszőleges $g \in G$ esetén*

$$\sum_{\chi \in \widehat{G}} \chi(g) = \begin{cases} |G|, & \textit{ha } g = 1, \\ 0 & \textit{különben.} \end{cases}$$

Bizonyítás. Az előző állítás bizonyításáshoz hasonlóan tetszőleges $\xi \in \widehat{G}$ esetén

$$\sum_{\chi \in \widehat{G}} \chi(g) = \sum_{\chi \in \widehat{G}} (\xi \cdot \chi)(g) = \sum_{\chi \in \widehat{G}} \xi(g)\chi(g) = \xi(g) \sum_{\chi \in \widehat{G}} \chi(g).$$

Ha $\xi(g) \neq 1$, akkor ebből következik, hogy

$$\sum_{\chi \in \widehat{G}} \chi(g) = 0.$$

Azt kell tehát megmutatnunk, hogy ha $g \neq 1$, akkor létezik olyan $\xi \in \widehat{G}$, amelyre $\xi(g) \neq 1$. Ennek igazolásához tekintsük a következő H halmazt:

$$H = \{g \in G \mid \forall \chi \in \widehat{G} : \ \chi(g) = 1\}.$$

Könnyen megmutatható, hogy H normálosztó G-ben. Vegyük észre, hogy a H szerinti mellékosztályozás osztályain minden $\widehat{G}$-beli karakter konstans, így $\widehat{G}$ beágyazható $\widehat{G/H}$-ba, amiből $|\widehat{G}| \leq |\widehat{G/H}|$ következik. Figyelembe véve, hogy $\widehat{G/H} \cong G/H$, adódik a következő összefüggés:

$$|G| = |\widehat{G}| \leq |\widehat{G/H}| = |G/H| = |G|/|H|,$$

amiből $|H| = 1$, és így $H = \{1\}$ következik. ■

1.2. Dirichlet-karakterek

A Dirichlet-karakterek nevüket az őket megalkotó Johann Peter Gustav Lejeune Dirchlet-ről kapták, aki 1837-es dolgozatában használta őket, hogy bizonyítsa tételét a prímszámok előfordulásáról számtani sorozatokban. Mi is e célból foglalkozunk velük.

1.6. Definíció. Legyen χ egy karaktere a modulo m redukált maradékosztályok $\mathbb{Z}_m^*$ csoportjának. Értelmezzük χ-t a természetes számok halmazán a következőképpen:

$$\chi(a) = \begin{cases} \chi(\overline{a}), & \text{ha } \overline{a} \in \mathbb{Z}_m^*, \\ 0 & \text{különben.} \end{cases}$$

Vegyük észre, hogy χ multiplikatív és m szerint periodikus. Az így előálló $\chi : \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ leképezéseket nezezzük (az m modulushoz tartozó) Dirichlet-karaktereknek.

1.7. Megjegyzés. A továbbiakban $m \geq 2$ egy rögzített modulust, χ pedig egy tetszőleges modulo m Dirichlet-karaktert jelöl, valamint a-val jelöljük mind az a természetes számot, mind az a-t tartalmazó modulo m maradékosztályt.

1.8. Állítás. *Ha $\chi \neq \chi_0$, akkor bármely x pozitív valós számra*

$$\left| \sum_{n \leq x} \chi(n) \right| < m.$$

Bizonyítás. Írjuk fel $[x]$-et $mq + r$ alakban, ahol $0 \leq r < m$. Ekkor

$$\left| \sum_{n \leq x} \chi(n) \right| = \left| \sum_{n=1}^{mq} \chi(n) + \sum_{n=mq+1}^{mq+r} \chi(n) \right|. \tag{1}$$

Az $im + 1, im + 2, \ldots, im + m$ számok teljes maradékrendszert alkotnak modulo m bármely $i \in \{0, 1, \ldots, q-1\}$ esetén. Így az 1.4. Állítás alapján az ezeken vett összeg 0. Ezt felhasználva (1) a következő alakban írható fel:

$$\left| \sum_{n=mq+1}^{mq+r} \chi(n) \right| \leq \sum_{n=mq+1}^{mq+r} |\chi(n)| \leq r < m.$$

■

1.9. Állítás. *Ha $\chi \neq \chi_0$, akkor tetszőleges $a, b \in \mathbb{Z}_m^*$ esetén*

$$\sum_{\chi} \overline{\chi(a)} \chi(b) = \begin{cases} \varphi(m), & \textit{ha } a \equiv b \mod m, \\ 0 & \textit{különben.} \end{cases}$$

Bizonyítás. Az 1.5. Állítást és a $\overline{\chi(a)} = \chi(a^{-1})$ összefüggést felhasználva

$$\sum_{\chi} \overline{\chi(a)} \chi(b) = \sum_{\chi} \chi(a^{-1}) \chi(b) = \sum_{\chi} \chi(a^{-1} b) = \begin{cases} \varphi(m), & \text{ha } a^{-1} b = 1, \\ 0 & \text{különben.} \end{cases}$$

Vegyük észre, hogy $a^{-1} b = 1$ pontosan akkor, ha $a \equiv b \pmod m$, így kész a bizonyítás. ■

2. A Riemann-féle ζ és a Dirichlet-féle L függvények

2.1. Definíció. A Riemann-féle ζ függvényt és a Dirichlet-féle L függvényeket $\mathrm{Re}(s) > 1$ esetén a következő formulákkal definiáljuk:

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}, \quad L(s,\chi) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi(n)}{n^s}.$$

2.2. Tétel. *A fenti függvények* $\mathrm{Re}(s) > 1$ *esetén holomorfak, és előállnak szorzat alakban a következőképpen:*

$$\zeta(s) = \prod_{p \text{ prím}} \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)^{-1} \quad \textit{és} \quad L(s,\chi) = \prod_{p \text{ prím}} \left(1 - \frac{\chi(p)}{p^s}\right)^{-1}.$$

Bizonyítás. Nyilvánvaló, hogy a függvényeket előállító sorok abszolút konvergensek, hiszen

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{\chi(n)}{n^s}\right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\mathrm{Re}(s)}} < \infty,$$

ha $\mathrm{Re}(s) > 1$. A Weierstrass-féle M-tesztet alkalmazva adódik az egyenletes konvergencia, Weierstrass konvergenciatétele pedig garantálja a függvények analitikus voltát [G].

Az egyszerűség kedvéért a továbbiakban jelöljön p mindig prímszámot. Felhasználva χ multiplikativitását a szorzatalak a következő formába írható át:

$$\prod_p \left(1 - \frac{\chi(p)}{p^s}\right)^{-1} = \prod_p \left(\frac{1}{1 - \frac{\chi(p)}{p^s}}\right) = \prod_p \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\chi(p^n)}{p^{ns}}\right). \tag{2}$$

A (2) egyenlőségben csak egy adott k-nál kisebb prímekre véve a szorzatot

$$\prod_{p \leq k} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\chi(p^n)}{p^{ns}}\right) = \sum_{n} \frac{\chi(n)}{n^s}, \tag{3}$$

ahol olyan n-ekre összegzünk, melyeknek nincs k-nál nagyobb prímtényezőjük. Ha $k \to \infty$, és alkalmazzuk a számelmélet alaptételét, akkor a (3) egyenlőség a következőképpen alalkul:

$$\prod_p \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\chi(p^n)}{p^{ns}}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi(n)}{n^s} = L(s,\chi).$$

Az állítás a ζ függvény esetén a fentivel analóg módon igazolható. ∎

2.1. Analitikus kiterjesztés

Ezen fejezet célja megmutatni, hogy a Riemann-féle ζ függvény és a Dirichlet-féle L függvények a $\mathrm{Re}(s) > 1$ tartománynál tágabb tartományon is értelmezhetők. Kiterjeszthetőek az egész komplex síkon meromorf függvényekké [G], azonban a Dirichlet-tétel bizonyításához nekünk elegendő a $\mathrm{Re}(s) > 0$ tartományra való kiterjesztés, így ennyivel megelégszünk. Ehhez pedig a következő tételt és annak következményét fogjuk felhasználni.

2.3. Tétel (Parciális összegzés). *Legyen* $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ *komplex számok egy sorozata,* $f(t)$ *pedig egy folytonosan differenciálható függvény az* $[1, x]$ *intervallumon, és legyen*

$$A(t) = \sum_{n \le t} a_n.$$

Ekkor

$$\sum_{n \le x} a_n f(n) = A(x) f(x) - \int_1^x A(t) f'(t)\, dt.$$

Bizonyítás. Első lépésben tegyük fel, hogy x természetes szám. Ekkor

$$\begin{aligned}
\sum_{n \le x} a_n f(n) &= \sum_{n \le x} \left(A(n) - A(n-1)\right) f(n) \\
&= \sum_{n \le x} A(n) f(n) - \sum_{n \le x-1} A(n) f(n+1) \\
&= A(x) f(x) - \sum_{n \le x-1} A(n) \int_n^{n+1} f'(t)\, dt \\
&= A(x) f(x) - \sum_{n \le x-1} \int_n^{n+1} A(t) f'(t)\, dt \\
&= A(x) f(x) - \int_1^x A(t) f'(t)\, dt,
\end{aligned}$$

mivel $A(t)$ lépcsős függvény. Ezzel beláttuk az állítást arra az esetre, ha x egész szám. Ha x nem egész, figyeljük meg, hogy

$$A(x) \cdot (f(x) - f([x])) - \int_{[x]}^x A(t) f'(t)\, dt = 0,$$

amivel kész a bizonyítás. ■

2.4. Következmény. *Tegyük fel, hogy* $A(x) = O(x^\delta)$*. Ekkor* $s > \delta$ *esetén*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s} = s \int_1^{\infty} \frac{A(t)}{t^{s+1}}.$$

Bizonyítás. Legyen $f(t) = \frac{1}{t^s}$, ekkor $f'(t) = -\frac{s}{t^{s+1}}$. A 2.3. Tételt alkalmazva

$$\sum_{n \le x} a_n f(n) = A(x) f(x) - \int_1^x A(t) f'(t)\, dt, \text{ azaz}$$

$$\sum_{n \le x} \frac{a_n}{n^s} = \frac{A(x)}{x^s} + s \int_1^x \frac{A(t)}{t^{s+1}}\, dt.$$

Ha $x \to \infty$, akkor $\frac{A(x)}{x^s} \to 0$, mivel $s > \delta$ és $A(x) = O(x^\delta)$. Tehát

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s} = s \int_1^{\infty} \frac{A(t)}{t^{s+1}}\, dt.$$

■

2.5. Állítás. *Az $(s-1)\zeta(s)$ függvény analitikusan kiterjeszthető a $\mathrm{Re}(s) > 0$ tartományra.*

Bizonyítás. A 2.3. Tételt alkalmazva $\mathrm{Re}(s) > 1$ esetén adódik, hogy

$$\sum_{n \le x} \frac{1}{n^s} = \frac{[x]}{x^s} + s \int_1^x \frac{[t]}{t^{s+1}}\, dt = \frac{x - \{x\}}{x^s} + s \int_1^x \frac{[t]}{t^{s+1}}\, dt. \tag{4}$$

Írjuk fel az $\frac{x}{x^s}$ függvényt integrál alakban a következőképpen:

$$\frac{x}{x^s} = \frac{1}{x^{s-1}} = 1 + (1-s) \int_1^x \frac{1}{t^s}\, dt. \tag{5}$$

Helyettesítsük be ezt a (4) egyenlőségbe:

$$\sum_{n \le x} \frac{1}{n^s} = 1 + (1-s) \int_1^x \frac{1}{t^s}\, dt - \frac{\{x\}}{x^s} + s \int_1^x \frac{[t]}{t^{s+1}}\, dt = 1 - \frac{\{x\}}{x^s} + \int_1^x \frac{1}{t^s}\, dt - s \int_1^x \frac{\{t\}}{t^{s+1}}\, dt.$$

Szorozzunk be $(s-1)$-gyel és alkalmazzunk határátmenetet. A jobb oldalon $\frac{\{x\}}{x^s}$ nullához tart, a bal oldalon pedig megkapjuk az $(s-1)\zeta(s)$ függvényt:

$$(s-1)\zeta(s) = s - 1 + (s-1) \int_1^\infty \frac{1}{t^s}\, dt - s(s-1) \int_1^\infty \frac{\{t\}}{t^{s+1}}\, dt. \tag{6}$$

Az (5) egyenlőség alapján $\int_1^\infty \frac{1}{t^s}\, dt = \frac{1}{s-1}$, ezt (6)-ba írva

$$(s-1)\zeta(s) = s - s(s-1) \int_1^\infty \frac{\{t\}}{t^{s+1}}\, dt. \tag{7}$$

A (7) egyenlőség jobb oldala egy olyan függvény, ami a $\mathrm{Re}(s) > 1$ tartományon megegyezik az $(s-1)\zeta(s)$ függvénnyel, és analitikus $\mathrm{Re}(s) > 0$ esetén. ■

2.6. Következmény. *A Riemann-féle ζ függvény kiterjeszthető a $\mathrm{Re}(s) > 0$ félsíkra egy olyan meromorf függvénnyé, melynek $s = 1$-ben egyszeres pólusa van, és ez az egyetlen szingularitása.*

2.7. Állítás. *Ha $\chi \ne \chi_0$, akkor az $L(s, \chi)$ függvény analitikusan kiterjeszthető a $\mathrm{Re}(s) > 0$ tartományra.*

Bizonyítás. Az 1.8. Állítás értelmében

$$A(x) = \sum_{n \le x} \chi(n) = O(1),$$

így a 2.4. Következményt alkalmazva kapjuk, hogy $s > 0$ esetén

$$L(s, \chi) = s \int_1^\infty \frac{A(t)}{t^{s+1}}.$$

■

2.2. A Dirichlet-féle L függvény viselkedése az $s = 1$ helyen

Ebben az alfejezetben igazoljuk, hogy minden χ_0-tól különböző Dirichlet karakterre $L(1, \chi) \neq 0$. Ezen az analitikus jellegű tényen múlik a Dirichlet-tétel bizonyítása.

2.8. Állítás. *Ha* $\mathrm{Re}(s) > 1$ *és* $(a, m) = 1$, *akkor*

$$\sum_{\chi} \overline{\chi(a)} \log L(s, \chi) = \varphi(m) \sum_{p^n \equiv a} \frac{1}{np^{ns}}.$$

Bizonyítás. A 2.2. Tételt, és a $\log(1-x)$ függvény Taylor-sorfejtését felhasználva kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}
\sum_{\chi} \overline{\chi(a)} \log L(s, \chi) &= \sum_{\chi} \overline{\chi(a)} \log \left(\prod_{p} \left(1 - \frac{\chi(p)}{p^s} \right)^{-1} \right) \\
&= \sum_{\chi} \overline{\chi(a)} \sum_{p} - \log \left(1 - \frac{\chi(p)}{p^s} \right) \\
&= \sum_{\chi} \overline{\chi(a)} \sum_{p} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\chi(p))^n}{np^{ns}} \\
&= \sum_{p} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{\chi} \overline{\chi(a)} \frac{\chi(p^n)}{np^{ns}} \\
&= \sum_{p} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{np^{ns}} \sum_{\chi} \overline{\chi(a)} \chi(p^n).
\end{aligned}$$

Az 1.9. Állítás alapján

$$\sum_{\chi} \overline{\chi(a)} \chi(p^n) = \begin{cases} \varphi(m), & \text{ha } p^n \equiv a, \\ 0 & \text{különben}, \end{cases}$$

és ezzel kész a bizonyítás. ■

2.9. Definíció. Legyenek $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ és s komplex számok, ekkor a

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s}$$

sort Dirichlet-sornak nevezzük.

2.10. Megjegyzés. Minden Dirichlet-sorhoz létezik $\sigma_0 \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ úgy, hogy a sor abszolút konvergens $\mathrm{Re}(s) > \sigma_0$ esetén és divergens $\mathrm{Re}(s) < \sigma_0$ esetén. Ezt a σ_0 értéket nevezzük a Dirichlet-sor konvergencia-abszcisszájának [G]. Mi csak az $a_n \geq 0$ esetre igazoljuk a konvergencia-abszcissza létezését.

2.11. Lemma. *Legyen* $\{a_n\}$ *nemnegatív számok egy sorozata. Ekkor létezik olyan* $\sigma_0 \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$, *hogy az*

$$f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s}$$

sor konvergál $s > \sigma_0$ esetén és divergál $s < \sigma_0$ esetén. Sőt, ha $\mathrm{Re}(s) > \sigma_0$, akkor a sor egyenletesen konvergál a $\mathrm{Re}(s) > \sigma_0 + \delta$ tartományon minden pozitív δ-ra, továbbá

$$f^{(k)}(s) = (-1)^k \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n (\log n)^k}{n^s}.$$

Bizonyítás. Ha a sor egyetlen valós számra sem konvergens, akkor legyen $\sigma_0 = \infty$. Egyébként tegyük fel, hogy a sor konvergens valamely s_0 valós számra. A majoráns kritérium értelmében a sor konvergens $s > s_0$ esetén, hiszen a tagok nemnegatívak. Legyen σ_0 azon valós számok infimuma, melyekre a sor konvergens. Az egyenletes konvergencia nyilvánvaló, emiatt tagonkénti deriválással kiszámíthatjuk $f^{(k)}(s)$ értékét $\mathrm{Re}(s) > \sigma_0$ esetén. ■

Az előző lemma mutatja a konvergencia-abszcissza létezését. Tegyük fel, hogy σ_0 valós, azaz nem végtelen, ekkor egy érdekes kérdés lehet a Dirichlet-sor viselkedése az $s = \sigma_0$ pontban. A későbbiekben megmutatjuk, hogy a sor divergál a konvergencia-abszcisszájában, ehhez azonban szükségünk van a következő tételre, melyet bizonyítás nélkül közlünk [R].

2.12. Tétel. *Legyen f a*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

hatványsor által meghatározott függvény. Ekkor f-nek van szingularitása a fenti hatványsor konvergenciatartományának határán.

2.13. Tétel. *Legyen $\{a_n\}$ nemnegatív számok egy sorozata, és legyen σ_0 az*

$$f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s}$$

Dirichlet-sor konvergencia-abszcisszája. Ekkor f egy holomorf függvény a $\mathrm{Re}(s) > \sigma_0$ tartományon, melynek $s = \sigma_0$ egy szingularitása.

Bizonyítás. A 2.11. Lemma alapján világos, hogy $f(s)$ egy olyan függvénysor határértéke, amely tetszőleges $\delta > 0$ esetén egyenletesen konvergens a $\mathrm{Re}(s) > \sigma_0 + \delta$ félsíkon, és így a Weierstrass konvergenciatétel értelmében $f(s)$ holomorf ezen a tartományon.

Tekintsünk egy tetszőleges $\sigma_1 > \sigma_0$ valós számot, ekkor a 2.11. Lemma alapján

$$f^{(k)}(\sigma_1) = (-1)^k \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n (\log n)^k}{n^{\sigma_1}},$$

és így átírhatjuk a σ_1 körüli hatványsort a következő alakba:

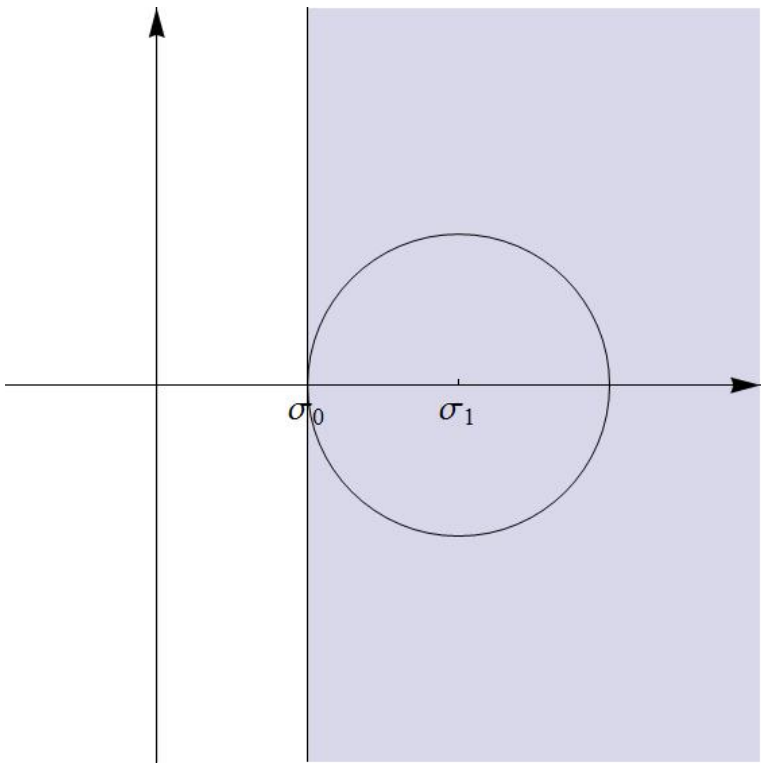
$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(\sigma_1)}{k!}(s - \sigma_1)^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\sigma_1 - s)^k}{k!} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n (\log n)^k}{n^{\sigma_1}}.$$

Ha $s < \sigma_1$, akkor ez egy nemnegatív tagú sor, és így megcserélhetjük az összeadások sorrendjét és alkalmazva az exponenciális függvény sorfejtését kapjuk, hogy

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\sigma_1 - s)^k}{k!} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n (\log n)^k}{n^{\sigma_1}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^{\sigma_1}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\sigma_1 - s)^k (\log n)^k}{k!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s}.$$

Tehát $s < \sigma_1$ esetén a Dirichlet-sor és a Taylor-sor ekvikonvergens.

Mivel $s < \sigma_0$ esetén a Dirichlet-sor divergál, így divergál a Taylor-sor is, ezért a σ_1 körüli Taylor-sor konvergenciasugara nem lehet más, mint σ_1 és σ_0 távolsága (lásd az 1. ábrát). A 2.12. Tétel alapján f-nek van szingularitása az ábrán látható körvonalon, ami csak a σ_0 pont lehet, hiszen az f-et definiáló Dirichlet-sor konvergens a körvonal minden σ_0-tól különböző pontjában.



1. ábra. A Dirichlet-sor és a Taylor-sor konvergenciatartománya

■

2.14. Állítás. *Ha* $\mathrm{Re}(s) > 1$, *akkor*

$$f(s) = \prod_{\chi} L(s,\chi) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{n^s},$$

ahol $c_n \geq 0$, *de ez a sor divergál* $s = \frac{1}{\varphi(m)}$ *esetén.*

Bizonyítás. Felhasználva a 2.8. Állítást kapjuk, hogy

$$f(s) = \exp\left(\log \prod_{\chi} L(s,\chi)\right) = \exp\left(\sum_{\chi} \log L(s,\chi)\right) = \exp\left(\sum_{p^n \equiv 1} \frac{\varphi(m)}{np^{ns}}\right).$$

Innen pedig Taylor-sorfejtéssel kapjuk a pozitív tagú alakot.

A divergencia bizonyításához elegendő az f függvény logaritmusával foglalkoznunk. Tekintsük a következő becslést, melyet úgy kapunk, hogy összegzéskor csak az $n = \varphi(m)$-hez tartozó tagokat vesszük figyelembe:

$$\log f(s) = \sum_{p^n \equiv 1} \frac{\varphi(m)}{np^{ns}} > \sum_{p^{\varphi(m)} \equiv 1} \frac{1}{p^{\varphi(m)s}}.$$

Az egyenlőtlenség jobb oldalában s helyére $\frac{1}{\varphi(m)}$-et írva és figyelembe véve, hogy $p^{\varphi(m)} \equiv 1$ akkor és csak akkor, ha $(p, m) = 1$, kapjuk, hogy

$$\log f(s) > \sum_{(p,m)=1} \frac{1}{p} = \sum_{p} \frac{1}{p} - \sum_{p|m} \frac{1}{p} = \infty,$$

hiszen $\sum_{p|m} \frac{1}{p}$ egy véges összeg. ■

2.15. Tétel. *Minden $\chi \neq \chi_0$ Dirichlet-karakterre $L(1, \chi) \neq 0$.*

Bizonyítás. A 2.1. alfejezetben láttuk, hogy $\chi \neq \chi_0$ esetén $L(s, \chi)$ analitikus a $\mathrm{Re}(s) > 0$ tartományon, továbbá azt is láttuk, hogy ζ meromorf a $\mathrm{Re}(s) > 0$ félsíkon és az $s = 1$ egyszeres pólus az egyetlen szingularitása. Vegyük észre, hogy

$$L(s, \chi_0) = \zeta(s). \prod_{p|m} \left(1 - \frac{1}{p^s}\right). \tag{8}$$

A fenti összefüggés miatt $L(s, \chi_0)$ is meromorf a $\mathrm{Re}(s) > 0$ félsíkon és az $s = 1$ egyszeres pólus az egyetlen szingularitása.

Ha létezik $\chi \neq \chi_0$, hogy $L(1, \chi) = 0$, akkor az $f(s) = \prod_\chi L(s, \chi)$ függvény analitikus a $\mathrm{Re}(s) > 0$ tartományon, mert az $L(s, \chi)$ függvény zérushelye semlegesíti az $L(s, \chi_0)$ függvény pólusát.

A 2.14. Állítás szerint viszont az f függvényt előállító Dirichlet-sor divergál $s = \frac{1}{\varphi(m)}$ esetén, amiből az következik, hogy a konvergencia-abszcissza, $\sigma_0 \geq \frac{1}{\varphi(m)} > 0$, és így a 2.13. Tétel alapján az f függvénynek szingularitása van az $s = \sigma_0$ pontban, ami ellentmond annak, hogy f analitikus a $\mathrm{Re}(s) > 0$ félsíkon. Tehát minden $\chi \neq \chi_0$ Dirichlet-karakterre $L(1, \chi) \neq 0$. ■

2.3. A Dirichlet-tétel

Dirichlet tétele tekinthető Euklidész azon tétele általánosításának is, miszerint végtelen sok prímszám van. Ugyanis ez a tétel azt állítja, hogy tetszőleges a és m természetes számokra $(a, m) = 1$ esetén végtelen sok $a + km$ alakú prímszám létezik, vagy másképpen megfogalmazva, hogy az

$$a, a + m, a + 2m, a + 3m, \ldots$$

számtani sorozatnak végtelen sok prím eleme van. Ennél egy erősebb állítást fogunk igazolni neveztetesen azt, hogy az $a + km$ alakú prímek reciprokaiból alkotott sor divergens, ami Euler a prímszámok reciprokaiból alkotott sor divergenciájáról szóló tételének általánosítása.

2.16. Tétel (Dirichlet-tétel). *Ha az a természetes számra $(a, m) = 1$, akkor*

$$\sum_{p \equiv a} \frac{1}{p} = \infty.$$

Bizonyítás. A 2.8. Állítás alapján tudjuk, hogy

$$\sum_{\chi} \overline{\chi(a)} \log L(1, \chi) = \varphi(m) \sum_{p^n \equiv a} \frac{1}{np^n}.$$

Ezt átalakítva kifejezhető a vizsgálni kívánt sor:

$$\sum_{p\equiv a}\frac{1}{p}=\frac{\overline{\chi(a)}}{\varphi(m)}\sum_{\chi}\log L(1,\chi)-\sum_{n\geq 2}\sum_{p^n\equiv a}\frac{1}{np^n}.$$

Első lépésben megmutatjuk, hogy

$$\sum_{n\geq 2}\sum_{p^n\equiv a}\frac{1}{np^n}<\infty.$$

Ehhez tekintsük a következő becslést:

$$\begin{aligned}\sum_{n\geq 2}\sum_{p^n\equiv a}\frac{1}{np^n}&<\sum_{p}\sum_{n\geq 2}\frac{1}{np^n}<\sum_{p}\frac{1}{2}\sum_{n\geq 2}\frac{1}{p^n}\\&=\frac{1}{2}\sum_{p}\frac{1}{p^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{p^n}=\frac{1}{2}\sum_{p}\frac{1}{p^2}\frac{1}{1-\frac{1}{p}}\\&=\frac{1}{2}\sum_{p}\frac{1}{p^2-p}<\frac{1}{2}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^2-n}\\&=\frac{1}{2}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n(n-1)}=\frac{1}{2}\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\right)<\infty.\end{aligned}$$

Célunk igazolni, hogy a $\sum_{\chi}\log L(1,\chi)$ sor divergens. A 2.15. Tétel alapján $L(1,\chi)\neq 0$ ha $\chi\neq\chi_0$, így elegendő az $L(s,\chi_0)$ függvényt az $s=1$ pontban vizsgálnunk. Használjuk fel a (8) összefüggést $\log L(s,\chi_0)$ becslésére:

$$\log L(s,\chi_0)=\log\left(\zeta(s)\prod_{p|m}\left(1-\frac{1}{p^s}\right)\right)=\sum_{p|m}\log(1-\frac{1}{p^s})+\log\zeta(s).$$

Ha $s\to 1$, akkor a fenti összeg első tagja véges határértékhez tart, $\log\zeta(s)$ pedig divergál. Így a $\sum_{\chi}\log L(1,\chi)$ sor divergens, és ezzel beláttuk Dirichlet tételét. ∎

Hivatkozások

[G] Theodore W. Gamelin, *Complex Analysis*, Undegraduate Texts in Mathemtics, Springer-Verlag, New York, 2001.

[R] Walter Rudin, *Real and Complex Analysis*, McGraw-Hill Book Co., New York, 1987.

[ME] M. Ram Murty, Jody Esmonde, *Problems in Algebraic Number Theory*, Graduate Texts in Mathematics 190, Springer-Verlag, 2005.

[M] M. Ram Murty, *Problems in Analytic number Theory*, Graduate Texts in Mathematics, Springer, New York, 2008

Alulírott Körmendi Kristóf kijelentem, hogy a szakdolgozatban foglaltak saját munkám eredményei, és csak a hivatkozott forrásokat (szakirodalom, eszközök, stb.) használtam fel. Tudomásul veszem, hogy szakdolgozatomat a Szegedi Tudományegyetem könyvtárában a kölcsönözhető könyvek között helyezik el, és az interneten is nyilvánosságra hozhatják.

2009. május 15. Körmendi Kristóf